Модифицированное отображение Эно с гистерезисной нелинейностью

А. В. Толкачев[1,2], email: tolkachev.akim@mail.ru

[1]Воронежский государственный университет
[2]Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова

Аннотация. *В статье исследуется динамика и управление для модифицированного отображения Эно с учетом гистерезисного элемента, который формализуется с помощью конструктивной модели Прейзаха. Проведен сравнительный анализ для хаотического режима с помощью бифуркационной диаграммы и старшего показателя Ляпунова. Идентифицирована область для параметра отображения с хаотическим динамическим режимом. Отмечена регуляризирующая роль гистерезисного элемента в модифицированной системе по сравнению с классическим отображением.*

Ключевые слова: *нелинейность, хаос, отображение Эно, гистерезис, модель Прейсаха.*

Введение

Для описания различных физических явлений, как правило, используют линейные или квазилинейные модели. Такой подход является достаточно простым и наглядным, но не всегда адекватным методом моделирования современных физических и технических систем. В рамках линейной парадигмы происходит декомпозиция исходной системы на ряд простых подсистем, влияние которых на совокупную динамику может быть учтено изолировано. Однако, в последнее время, стало понятно, что допущение о линейности модели приводит к потере важных качественных характеристик исследуемых явлений. Поэтому, в современной науке все большую роль играют нелинейные модели, так как большинство практически важных явлений протекают в нелинейной области.

Известно, что в случае нелинейной системы совокупность ее частей не определяет в полной мере особенности динамики и эволюции такой системы. Нелинейность проявляется в образовании новых структур, которые являются временно или пространственно когерентными. Эти новые структуры представляют собой достаточно большие объекты, обладающие уникальными свойствами.

Детерминированный хаос – одно из ключевых направлений исследований, связанных с нелинейными явлениями [1]. Такие динамические системы обладают отличительным свойством, которое состоит в том, что для них невозможно предсказать поведение. Чувствительная зависимость от начальных условий приводит к экспоненциальному росту ошибок, что делает предсказание в будущие моменты времени математически невозможным за пределами определенного характерного (ляпуновского) времени. На сегодня, особенно популярным, стало исследовать хаотические системы с дискретным временем из-за их простоты при моделировании, в отличие от соответствующим им системам с непрерывным временем.

Еще одним из примеров нелинейных явлений, играющих значительную роль в современных исследованиях, является гистерезис. Математическая теория систем с гистерезисом, трактует гистерезисные нелинейности как операторы или преобразователи с пространствами состояний. Наиболее полно конструктивные модели гистерезисных преобразователей, трактуемых как операторы, зависящие от своего начального состояния как от параметра и определенные на широком функциональном пространстве (например, на пространстве непрерывных функций или функций ограниченной вариации), изложены в монографии Красносельского М. А. и Покровского А. В [2].

В настоящей работе проводится сравнительный анализ хаотической системы с дискретным временем, известной под названием отображение Эно [3] и её модификации с гистерезисной нелинейностью, формализуемой посредством модели Прейзаха [4].

1. Отображение Эно с гистерезисной нелинейность Прейзаха

Рассмотрим абстрактный пример динамической системы с дискретным временем, обладающей странным аттрактором. Она может служить для описания динамики ряда простых физических систем, таких как частица, в вязкой среде под действием импульсных толчков, интенсивность которых зависит от координаты. Такую систему еще называют отображением Эно и записывают в следующем виде:

$$\begin{cases} x(n+1) = 1 - a \cdot x^2(n) - b \cdot y(n) \\ y(n+1) = x(n), \end{cases}$$

где a и b некоторые параметры.

Отображение Эно чувствительно к значениям параметров. При варьировании этих величин, динамика отображения имеет различные режимы. Для хаотического режима $(a,b) = (1.4;\ -0.3)$, а аттрактор изображен на рис.1 а.

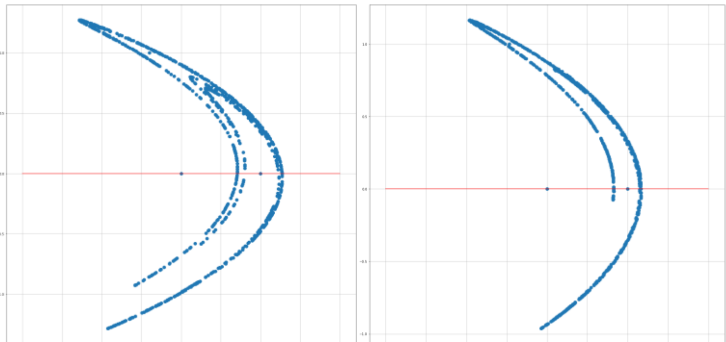
Добавим в первое уравнение системы гистерезисный элемент $out(t)$, который формализуем с помощью конструктивной модели Прейзаха или нелинейности Прейзаха. В этом случае исходная система примет следующий вид:

$$\begin{cases} x(n+1) = 1 - a \cdot x^2(n) - b \cdot y(n) - out(t) \\ y(n+1) = x(n), \end{cases}$$

Для нее определяют

$$out(t) = \hat{\Gamma} inp(t) = \iint\limits_{\alpha > \beta} \mu(\alpha, \beta) \hat{\gamma}_{\alpha, \beta} [t_0, \eta_0(\alpha, \beta)] inp(t) d\alpha d\beta, \;\; t \geq t_0 .$$

Здесь $\hat{\Gamma}$ имеет переменный от времени t вход $inp(t) = x(n-1) + \left(x(n) - x(n-1)\right) \cdot t$ и переменный от времени выход $out(t)$. У оператора $\hat{\Gamma}$ должна быть определена скалярная весовая функция $\mu(\alpha, \beta)$ и η_0 начальное состояние неидеального реле (1 или -1). В уравнении (3), – неидеальное реле (гистерон в модели Прейзаха), у которого имеются пороговые числа α и β для состояния неидеального реле при $t \geq t_0$ и $\alpha > \beta$ [5].



а б

а – без учета гистерезисной нелинейности, б – с учетом гистерезисной нелинейности

Рис. 1. Аттрактор Эно при значениях параметров $a = 1.4$ и $b = -0.3$.

2. Описание условий численных экспериментов и обсуждение результатов

Учет гистерезиса в системе должен привести к изменениям динамических режимов и возможности управления этими режимами. Для примера, рассмотрим случай, когда в динамике учитывается гистерезисная нелинейность, тогда для системы (2), аттрактор примет вид как на рис.1. б. На нем видно, что учет гистерезиса приводит к заметным отличиям аттракторов при одних и тех же значениях параметров $(a, b) = (1.4;\ -0.3)$.

Ранее на рис.1 демонстрировался аттрактор, свойственный для исследуемого отображения, который был построен с помощью интегрированной среды разработки Jupyter Notebook на языке программирования Python с помощью соотношений (1) и (2) при $n = 1000$ итерациях цикла расчета Гистерезисная нелинейность Прейзаха в (2) аппроксимировалась дискретным аналогом с 101 гистероном. Пороговые числа α, β рассматривались на интервале $(-1;\ 1)$ с шагом $h = 0.02$.

Используя эти параметры, исследуем динамику системы Эно, в условиях нелинейности Прейзаха и без нее. Для данного двумерного точечного отображения допускается метод бифуркационных диаграмм. Этот метод наглядно интенсифицирует хаос, однако, не считается точным. Для этого смоделируем динамику при различных сочетаниях параметра $a \in [0;\ 1.4]$ с постоянным параметром $b = -0.3$. И отобразим поточечно на плоскости $(a, x(n))$, как на рис.2.

Для каждых, из этого множества сочетаний параметров a с b так же можно рассчитать старший ляпуновский показатель Λ , используя метод Розенштейна, который реализован в модуле nolds для Python. Поскольку, в исследованиях детерминированного хаоса, расчет показателей Ляпунова считается самым объективным методом его идентификации (при $\Lambda > 0$), то уместно графически отобразить рассчитанный старший ляпуновский показатель Λ на бифуркационною диаграмму. Это можно сделать посредствам другого модуля matplotlib. В результате численного моделирования были получены рис. 2 и рис. 3. Красным цветом на них обозначен показатель Λ , синим точки бифуркационной диаграммы.

В итоге, видно (рис.3), что наличие гистерезисной нелинейности в системе приводит к существенным изменениям её динамики. Например, в рис.2 видна реализация различных режимов с ростом параметра $a \in (1.16;\ 1.4)$. При $\Lambda = 0$ происходит смена периода 2 колебаний и реализация 4, 8, а затем последовательность бифуркаций удвоения периода. На рис. 3 уже заметна регуляризация и уменьшение области у параметра a , при котором идентифицируется хаос ($\Lambda > 0$) . За счёт чего, увеличивается область для других режимов: стационарных, периодических и квазипериодических в интервале $a \in (0{,}1;\ 16)$. И последовательность бифуркаций удвоения периода начинается при больших значениях параметра a. А смена режима с периодом 2 происходит при большом значении $a > 0.4$ чем на рис 2. Так же и для других режимов.

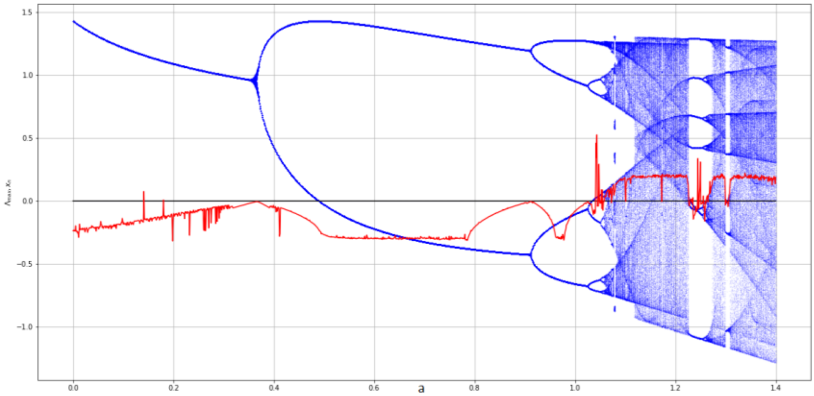


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма (синий) и старший показатель Ляпунова Λ (красный) для отображения Эно без учета гистерезисной нелинейности (2).

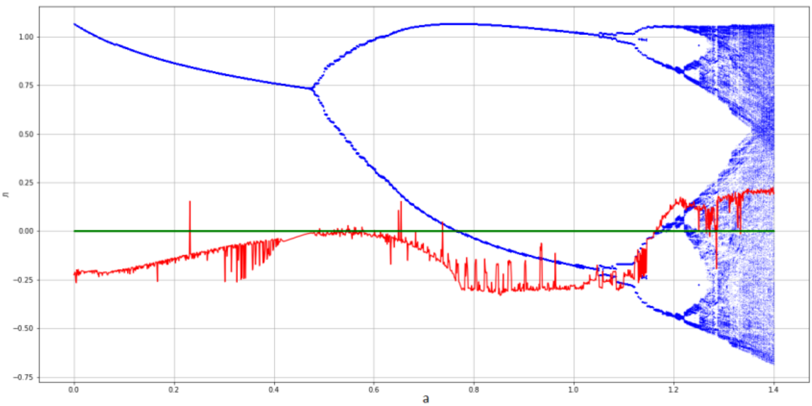


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма (синий) и старший показатель Ляпунова Λ (красный) для отображения Эно с учетом гистерезисной нелинейности (3).

Заключение

В работе исследована модель двумерного отображения Эно с гистерезисной нелинейностью, формализованная при помощи оператора Прейзаха. При проведении сравнительного анализа модифицированного и классического отображения Эно, было установлено, что наличие гистерезисной нелинейности, приводит к регуляризации динамики и увеличению области значений параметра a, для которых характерны отличные от хаоса динамические режимы.

Реализован скрипт на языке программирования Python для расчета и визуализации полученных данных при моделировании динамики исследуемой нелинейной системы.

Список литературы

1. Scott, A. C. A The Nonlinear Universe: Chaos; Emergence; Life / A. C. Scott — Spinger, 2007 — 271p.
2. Красносельский, М.А. Системы с гистерезисом / М.А. Красносельский, А.В. Покровский — Москва: Наука, 1983. — 272 с
3. С. П. Кузнецов Динамический хаос (курс лекций) / С. П. Кузнецов — ФИЗМАТЛИТ, 201 — 295 с
4. Красносельский А. М. Покровский, А. В., Диссипативность нерезонансного маятника с ферромагнитным трением / А. М. Красносельский, А. В. Покровский // Автомат. и телемех. – 2006– выпуск 2. – С. 57–69
5. Mayergoyz I. D. Mathematical Models of Hysteresis / I. D. Mayergoyz — Spinger, 1991 — 207 p., https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3028-1